Uitwerkingen tentamen Wiskunde VI, 17 augustus 1992

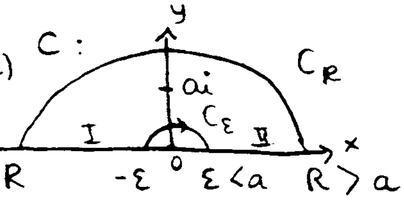
1 (i) ⓐ $|f(z)|=|z^2+1| \Rightarrow f(\pm i)=0 \Rightarrow f(z)/(z^2+1)$ is analytisch op $|z|<3$ en $|f(z)/(z^2+1)|=1$ bijv. in $z=0$, d.w.z. de modulus van $f(z)/(z^2+1)$ heeft een max. in een inwendig punt ($z=0$) van een open verzameling ($|z|<3$) $\Rightarrow$ (max. mod pr.) $f(z)/(z^2+1)\equiv c$ op $|z|<3$ voor een constante c en $|c|=1$.

ⓑ Nu geldt $f(\pm i)=0$, $f(\pm 1)=0 \Rightarrow f(z)/(z^4-1)$ is analytisch op $|z|<3$. Voor $|z|=2$ geldt: $|f(z)/(z^4-1)| \leq |(z^2+1)/(z^4-1)| = \frac{1}{|z^2-1|} \leq \frac{1}{|z|^2-1} = \frac{1}{3}$.
Max. mod. pr. $\Rightarrow |f(z)| \leq \frac{1}{3}|(z^4-1)|$ niet alleen op $|z|=2$ maar ook op $|z|<2$.

(ii) $(z-1)\,g(z) = \frac{1}{(z-1)f(z)} \to \frac{1}{1}=1,\ z\to 1 \Rightarrow g(z)$ heeft enkelv. pool in $z=1$ en residu $=1$

$(z-1)\,h(z) = \frac{1}{z+1}\,\underline{(z^2-1)f(z^2)} \to \frac{1}{2}\,1 = \frac{1}{2},\ z\to 1 \Rightarrow h(z)$ heeft enkelv. pool in $z=1$ en residu $1/2$.

2. (i) Coeff. a_k van z^k in $f(z)=(z^n+z^{-n})e^z = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1} f(z)/z^{k+1}\,dz = (z=e^{i\varphi})$
$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2\cos n\varphi\, e^{\cos\varphi + i\sin\varphi - ik\varphi}\,d\varphi$. Hier $k=2n$ en $n=4$. Dan is
$(z^4+\frac{1}{z^4})(1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^4}{4!}+\cdots+\frac{z^{12}}{12!}+\cdots) = \cdots + (\frac{1}{4!}+\frac{1}{12!})z^8+\cdots \Rightarrow a_8 = \frac{1}{4!}+\frac{1}{12!}$
en $\int_0^{2\pi} 2\cos 4\varphi\, e^{\cos\varphi + i\sin\varphi - 8i\varphi}\,d\varphi = \pi(\frac{1}{4!}+\frac{1}{12!})$.

(ii) 

Residuenst. $\int_C \frac{dz}{z(z-ai)^2} = 2\pi i\, \mathrm{Res}_{z=ai} f$ (integrand) $=$
$= 2\pi i\left(\frac{d}{dz}\frac{1}{z}\right)_{z=ai} = 2\pi i\, \frac{-1}{z^2}\Big|_{z=ai} = \frac{2\pi i}{a^2}$

Li lid $= \int_I + \int_{II} + \int_{C_\varepsilon} + \int_{C_R}$. Hierin: $\int_I + \int_{II} = \int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x(x-ai)^2} + \int_\varepsilon^R \frac{dx}{x(x-ai)^2} \to PV\int_{-\infty}^{\infty}$ ($\varepsilon\downarrow 0$, $R\to\infty$)

$\int_{C_\varepsilon} \to -\pi i\, \mathrm{Res}_{z=0} f = -\pi i\, \frac{1}{(z-ai)^2}\Big|_{z=0} = \frac{\pi i}{a^2}$, en $\left|\int_{C_R}\right| = (z=Re^{i\varphi})$
$= \left|\int_0^\pi \frac{Rie^{i\varphi}d\varphi}{Re^{i\varphi}(Re^{i\varphi}-ai)^2}\right| \leq \int_0^\pi \frac{d\varphi}{|Re^{i\varphi}-ai|^2} \leq \frac{1}{(R-a)^2}\int_0^\pi d\varphi = \frac{\pi}{(R-a)^2} \to 0,\ R\to\infty$

Conclusie als $R\to\infty$, $\varepsilon\downarrow 0$ dan $PV\int_{-\infty}^{\infty} + \frac{\pi i}{a^2} = \frac{2\pi i}{a^2} \Rightarrow PV\int_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi i}{a^2}$.

3 (i) Differentiaalvergelijking is $w''+p(z)w'+q(z)w=0$, $p(z)=\frac{-2z}{1-z^2}$, $q(z)=\frac{n(n+1)}{1-z^2}$
$z=1$: $(z-1)p(z)\to 1$, $(z-1)q(z)\to 0$ als $z\to 1$: $\alpha(\alpha-1)+1\alpha+0=0 \Rightarrow \alpha_{1,2}=0,0$
$z=-1$: $(z+1)p(z)\to 1$, $(z+1)q(z)\to 0$ als $z\to -1$: $\beta(\beta-1)+\beta+0=0 \Rightarrow \beta_{1,2}=0,0$
$z=\infty$: $zp(z)\to 2$, $z^2q(z)\to -(n+1)n$ als $z\to\infty$ $\gamma(\gamma-1)+(2-2)\gamma - n(n+1)=0 \Rightarrow \gamma_{1,2}=-n, n+1$.

$\Rightarrow$ P symbool $= P\left\{\begin{matrix} -1 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & -n & ;z \\ 0 & 0 & n+1 & \end{matrix}\right\}$

(ii) Andere opl. hebben logaritmische term. Noem zo'n opl $Q_n(z)$

(iii) P symbool $= P\left\{\begin{matrix} \zeta(-1) & \zeta(1) & \zeta(\infty) & \\ 0 & 0 & -n & \zeta \\ 0 & 0 & n+1 & \end{matrix}\right\}_{\zeta=\zeta(z)}$ Hier $\zeta(z)=\frac{1+z}{2} \Rightarrow$

P symbool $= P\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & -n & ;\frac{1+z}{2} \\ 0 & 0 & n+1 & \end{matrix}\right\} \ni {}_2F_1(-n, n+1; 1, \frac{1+z}{2})$

$1-c \Rightarrow c=1$ a b

$\Rightarrow {}_2F_1(-n, n+1, 1, \frac{1+z}{2}) = c\,P_n(z) + d\,Q_n(z)$.